

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

21 Novembre 1996

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un gas perfetto classico di N particelle a temperatura T sottoposte ad un campo esterno di forze. L'energia di singola particella è:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + br \quad \text{con } b > 0$$

Le particelle sono vincolate a muoversi all'esterno di una sfera di raggio R e centro nell'origine.

- Calcolare la funzione di partizione nell'ensemble canonico.
- Calcolare la pressione esercitata dal gas sulla superficie della sfera anzidetta e discutere il risultato nel limite $T \rightarrow 0$.
- Calcolare l'energia interna del gas.
- Come si comporta il calore specifico per temperature molto maggiori o molto minori di br ?

Si ricordi che l'integrale $\int_a^b dx x^2 e^{-x}$ può essere calcolato con l'aiuto della formula:

$$\int_a^b dx x^2 e^{-x} = \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(\int_a^b dx e^{-\lambda x} \right)_{\lambda=1}$$

ESERCIZIO N° 2

Sia ϵ_F l'energia di Fermi di un gas perfetto di fermioni in due dimensioni, contenuto in un quadrato di lato L alla temperatura T .

- Calcolare la densità del gas.
- Nel limite non degenere (kT grande) calcolare l'energia interna ed il calore specifico C_V .

PROVA DI ESAME E III ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

6 Febbraio 1997

ESERCIZIO N° 1

Un gas di fermioni di massa m e spin $1/2$, in equilibrio alla temperatura $T = 0^\circ K$, è racchiuso in una scatola di area di base L^2 ed altezza infinita. I fermioni sono soggetti ad un campo di forze esterne diretto lungo l'asse z verso il basso e descritto dal potenziale:

$$V(z) = \alpha \sqrt{z}$$

dove α è una costante. L'origine dell'asse z si assume presa sulla base della scatola.

- Determinare il numero medio di particelle N in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F del gas.
- Calcolare il valore medio dell'impulso che può avere un fermione che si trovi ad un'altezza z uguale alla metà di z_{MAX} .

N.B. Vale il seguente integrale: $\int_0^1 dx (1 - \sqrt{x})^{3/2} = 8/35$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

18 Febbraio 1997

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un gas di particelle classiche di massa m , non interagenti, vincolate a muoversi in una dimensione. Il gas è immerso in un campo esterno tale che l'energia della singola particella è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + b x^{2n}$$

con $b > 0$ ed n intero. Determinare:

- con quale potenza della temperatura varia lo scarto quadratico medio

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

- il calore specifico per particella a "volume" costante.

Si tenga presente che il problema può essere anche risolto senza calcolare esplicitamente alcun integrale.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

17 Giugno 1997

ESERCIZIO N° 1

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale, con Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

- a) Calcolare, nel caso classico, la funzione di partizione Z dell'ensemble canonico, l'energia media U ed il calore specifico a frequenza costante, $C = (\partial U / \partial T)_\omega$, verificando il teorema di equipartizione dell'energia.

- b) Sapendo che, nel caso quantistico, lo spettro dell'energia è:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e che ad ogni n corrisponde un solo stato, calcolare nuovamente, nel caso quantistico, Z , U e C .

- c) In che limite per la temperatura T , l'energia media ed il calore specifico del caso (b) tendono ai limiti classici calcolati in (a)?

Al contrario, in che regione di T si hanno deviazioni dal caso classico?

- d) Nella regione di T in cui gli effetti quantistici sono rilevanti, $C_{\text{Quantistico}} < C_{\text{Classico}}$. Sapreste darne una spiegazione intuitiva?

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Luglio 1997

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N rotatori rigidi quantistici ma distinguibili, che hanno per Hamiltoniana $H = L^2/2I$, dove L^2 è il momento angolare ed I è il momento di inerzia.

Il sistema è in equilibrio termico alla temperatura T .

- a) Scrivere la funzione di partizione canonica del sistema, tenendo conto di tutti i possibili valori del momento angolare e della corrispondente degenerazione dei livelli.
- b) Calcolare l'energia interna del sistema nel limite di T molto grande (si consiglia di usare per lo spettro dei livelli del rotatore l'approssimazione di spettro continuo).
- c) Calcolare l'energia interna e la capacità termica del sistema nel limite di T molto piccolo (si consiglia di troncatura la somma di partizione lasciando solo i termini significativi).

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

9 Settembre 1997

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle di massa m vincolate a muoversi all'interno di un paraboloide cilindrico di equazione:

$$z = a r^2$$

con (r, z, φ) le usuali coordinate cilindriche. Il paraboloide è limitato superiormente da un coperchio all'altezza h . Le particelle sono inoltre soggette ad una forza di attrazione di tipo armonico tale che l'Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k z^2$$

- a) Calcolare la funzione di partizione canonica Z del sistema.
- b) Calcolare l'entropia e l'energia interna del gas nel limite in cui l'altezza del paraboloide h tende ad infinito.
- c) Discutere se risulta soddisfatto il principio di equipartizione dell'energia e perchè.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

14 Novembre 1997

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto, composto da N particelle di massa m , è contenuto in un recipiente cilindrico di raggio R ed altezza h . Il sistema è in presenza di un campo esterno costante ed il cilindro ruota attorno al proprio asse, di modo che l'Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + a z - b r^2$$

con a e b costanti positive; z indica la quota misurata a partire dalla base del cilindro ed r rappresenta la distanza dall'asse del cilindro.

Con il formalismo dell'ensemble Gran-Canonico determinare:

- a) il potenziale chimico μ in funzione del numero di particelle N , della temperatura T e dei parametri del cilindro;
- b) l'energia interna per particella;
- c) la pressione in direzione radiale, p_r , in funzione di r con $0 \leq r \leq R$.

ESERCIZIO N° 2

Si consideri un gas costituito da N fermioni di spin 1/2, non interagenti, contenuti in un volume V alla temperatura $T = 0^0 K$. Sia

$$H = \frac{p^2}{2m} + A p^4$$

la relazione tra energia ed impulso per le particelle del gas, con $p = |\vec{p}|$ ed $A > 0$. Calcolare:

- a) l'energia di Fermi ε_F del gas;
- b) il numero di particelle con impulso in modulo minore di $p_F/2$ come funzione del numero di particelle totali N .

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

6 Febbraio 1998

ESERCIZIO N° 1

Si consideri un sistema costituito da N rotatori quantistici distinguibili non interagenti tra loro ed in equilibrio termico alla temperatura T . L'Hamiltoniana di ciascun rotatore sia:

$$H = \frac{A}{\hbar^2} L^2$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare ed A una costante data. Determinare:

- a) a quale temperatura la probabilità di trovare un rotatore nel livello fondamentale è uguale a quella di trovarlo in un qualsiasi stato del primo livello eccitato;
- b) il comportamento del calore specifico in funzione di T nelle vicinanze dello zero assoluto.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Febbraio 1998

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N particelle distinguibili, non interagenti tra loro, in equilibrio termico alla temperatura T . L'energia di ciascuna particella può assumere tre valori discreti, pari rispettivamente a:

$$E_1 = -\varepsilon, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = +\varepsilon$$

Il livello di energia E_2 è inoltre doppiamente degenero, mentre i livelli E_1 ed E_3 corrispondono ciascuno ad un singolo stato quantistico.

- a) Determinare l'entropia del sistema e discutere il risultato nei limiti di temperatura $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow +\infty$.
- b) Calcolare il calore specifico del sistema nel limite di basse temperature.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

18 Giugno 1998

ESERCIZIO N° 1

La compressibilità isoterma K di un sistema è definita dall'equazione:

$$\frac{1}{K} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

- a) Dimostrare che per un gas perfetto di fermioni allo zero assoluto K è proporzionale a $V^{5/3}$.
- b) Dimostrare che, invece, K è infinito per un gas di bosoni fortemente degenero ($T < T_0$) e dare un'interpretazione fisica del risultato.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Settembre 1998

ESERCIZIO N° 1

Un gas classico con N particelle di massa m si trova in equilibrio alla temperatura T . Il gas è contenuto in un recipiente cilindrico con asse z , altezza H ed area di base A . Le particelle del gas sono inoltre soggette al potenziale:

$$V(x, y, z) = a \log \left(1 + \frac{z}{b} \right)$$

- a) Calcolare l'energia libera.
- b) Nel caso in cui $a = mgb$ stabilire se la quota del baricentro z_B è maggiore, minore o uguale di quella che si avrebbe se le particelle fossero invece soggette al potenziale gravitazionale mgz . Si consideri per semplicità il calcolo nel limite $H \rightarrow \infty$ con la condizione $mgb > 2kT$.
- c) Si fornisca un'interpretazione fisica del risultato ottenuto al punto b), discutendone la validità generale anche per valori finiti dell'altezza H del cilindro.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

23 Settembre 1998

ESERCIZIO N° 1

Un gas di fotoni all'equilibrio si trova racchiuso in una cavità di volume V_i alla temperatura T_i . Determinare:

- a) Il lavoro necessario a variare isotermicamente il volume della cavità fino ad un volume V_f .
- b) Il lavoro necessario a variare adiabaticamente il volume della cavità fino ad un volume V_f e la temperatura finale T_f .
- c) Il rapporto tra il numero totale di fotoni presenti nel volume V_f nei due casi.

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Novembre 1998

ESERCIZIO

Si consideri un gas perfetto composto da N particelle di massa m e spin $1/2$, mantenuto in equilibrio alla temperatura T . Il gas è racchiuso in un cono di altezza l e raggio di base R , avente vertice nell'origine e come asse il semiasse $z > 0$ (il cono è dunque orientato con il vertice diretto verso il basso). Sul gas agisce inoltre la forza peso, così che l'Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In questo caso:

- 1) Determinare l'energia libera del gas, discutendone in particolare il risultato nel limite di alte temperature $\tau \gg mgl$.
- 2) Calcolare l'energia interna del gas nei due limiti $\tau \gg mgl$ e $\tau \ll mgl$ rispettivamente.
- 3) Calcolare il potenziale chimico μ del gas e discutere quale condizione deve soddisfare la densità media $\rho = N/V$ perchè il gas possa essere trattato come un gas di Boltzmann classico.
- 4) FACOLTATIVO: Mostrare che, come nel caso di una colonna di gas, la densità $\rho(z)$ nel cono decresce esponenzialmente con l'altezza.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. Assumendo che l'energia di Fermi ε_F soddisfi la condizione $\varepsilon_F < mgl$, determinare:

- 5) L'energia di Fermi ε_F .
- 6) L'energia media del gas come funzione del numero di particelle N e dell'energia di Fermi ε_F .

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

9 Febbraio 1999

ESERCIZIO N° 1

Un gas è composto da N particelle non interagenti di massa m e spin $1/2$. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T ed è soggetto all'azione di un campo di forze esterno tale che l'energia potenziale di singola particella è:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 (r-a)^2 \theta(r-a)$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In queste condizioni:

- a) Determinare il numero medio di particelle che si trovano ad una distanza dall'origine minore di a .
- b) Calcolare l'energia interna del gas, mostrando che nei limiti $a \rightarrow 0$ ed $a \rightarrow \infty$ si ottengono rispettivamente i valori previsti per un gas di oscillatori armonici tridimensionali e per un gas di particelle libere.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

- c) Determinare l'energia di Fermi del gas e la massima distanza dall'origine, r_M , alla quale si può trovare una particella del gas. (Si assuma $r_M > a$).

Per il calcolo è possibile utilizzare le seguenti formule di integrazione:

$$\int_0^1 ds (1-s^2)^{3/2} = \frac{3\pi}{16} \quad , \quad \int_0^1 ds s (1-s^2)^{3/2} = \frac{1}{5} \quad , \quad \int_0^1 ds s^2 (1-s^2)^{3/2} = \frac{\pi}{32}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

19 Febbraio 1999

ESERCIZIO N° 1

Un solido è costituito da N molecole che possono essere considerate non interagenti e vincolate rigidamente alle loro posizioni di equilibrio. Ciascuna molecola è a sua volta costituita da tre atomi di spin $1/2$, le cui posizioni di equilibrio occupano i vertici di un triangolo equilatero. Gli spin degli atomi sono diretti parallelamente all'asse z (con autovalori $\pm\hbar/2$) e gli atomi interagiscono tra loro mediante un'interazione di tipo spin-spin. Trascurando anche l'energia cinetica associata alle vibrazioni atomiche, si può scrivere l'Hamiltoniana di singola molecola nella forma:

$$H = -J (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

dove J è una costante con le dimensioni di energia e σ_k rappresenta la componente z dell'operatore di spin dell'atomo k -esimo, in unità di $\hbar/2$. Il solido è mantenuto in equilibrio alla temperatura T .

- Determinare i possibili livelli di energia di ciascuna molecola ed il corrispondente grado di degenerazione.
- Utilizzando i risultati ottenuti al punto a), calcolare la funzione di partizione canonica del solido, l'energia libera e l'entropia.
- Calcolare i limiti di bassa ed alta temperatura per l'entropia del solido nei due casi: $J > 0$ (interazione ferromagnetica) e $J < 0$ (interazione anti-ferromagnetica), discutendo l'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.
- Assumendo $J > 0$, calcolare il calore specifico del solido nel limite di basse temperature.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10 Giugno 1999

ESERCIZIO N° 1

Un gas è costituito da N elettroni non interagenti mantenuti in equilibrio alla temperatura $T = 0$. Il gas è vincolato a muoversi in due dimensioni sulla superficie di un disco circolare di raggio R ed è soggetto ad una forza esterna radiale costante diretta verso il bordo del disco. L'Hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = \frac{p^2}{2m} - br$$

con b una costante positiva. Calcolare:

- L'energia di Fermi ε_F del gas.
- L'energia interna E e l'energia libera F .
- La pressione radiale esercitata dal gas sul bordo del disco (definita in due dimensioni come la forza esercitata per unità di lunghezza) ed il potenziale chimico μ , verificando che quest'ultimo coincide effettivamente con l'energia di Fermi ε_F .

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

8 Luglio 1999

ESERCIZIO N° 1

Un sistema isolato è costituito da N oscillatori armonici distinguibili, classici, unidimensionali, di massa m e frequenza ω .

- Utilizzando il formalismo dell'ensemble microcanonico, calcolare l'entropia $S(E)$ del sistema (come funzione dell'energia interna E) e la corrispondente temperatura T .
- Verificare che allo stesso risultato si giunge calcolando l'entropia $S(E)$ utilizzando il formalismo dell'ensemble canonico.
- Nel limite di basse temperature, $T \rightarrow 0$, l'entropia così calcolata non tende a zero. Sapreste spiegare perchè tale risultato non è in contraddizione con il terzo principio della termodinamica?

Si ricorda che in coordinate polari l'elemento di volume infinitesimo in N dimensioni è $d^N q = d\Omega_N q^{N-1} dq$, dove l'angolo solido totale è $\Omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$. Può inoltre risultare utile la seguente definizione integrale della funzione beta:

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Settembre 1999

ESERCIZIO N° 1

Un gas è composto da N particelle non interagenti, di massa m e spin $1/2$. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T ed è soggetto ad un campo di forze centrali, descritte dal potenziale:

$$V(r) = ar$$

dove $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ed a è una costante positiva.

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In queste condizioni:

- Utilizzando il formalismo dell'ensemble gran canonico, determinare il potenziale chimico μ e l'entropia S del gas, come funzioni del numero totale di particelle N e della temperatura T .
- Calcolare l'energia interna E del gas, verificando che il risultato è in accordo con il teorema di equipartizione generalizzato:

$$\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = kT$$

dove il simbolo $\langle \dots \rangle$ indica il valore medio e p_i e q_i rappresentano un qualunque impulso e coordinata generalizzata del sistema.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

- Determinare l'energia di Fermi ε_F e la massima distanza dall'origine alla quale si possono ancora trovare particelle del gas.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

24 Settembre 1999

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N sottosistemi quantistici, distinguibili, mantenuti in equilibrio alla temperatura T . Ciascun sottosistema può trovarsi in un numero finito L di livelli di energia discreti e non degeneri, della forma:

$$E_l = l \varepsilon, \quad l = 0, 1, \dots, L - 1$$

- Calcolare l'energia interna E del sistema e discutere, in particolare, il risultato nei limiti di basse ed alte temperature.
- Calcolare l'entropia S del sistema, discutendo anche in questo caso il valore ottenuto nei limiti di basse ed alte temperature.

Si assuma invece che i sottosistemi siano indistinguibili e che non vi sia alcun vincolo sui possibili valori dei numeri di occupazione di ciascuno stato. In questo caso:

- Determinare l'energia interna E come funzione della temperatura T e del potenziale chimico μ , e l'equazione che lega μ a T ed al numero totale N di sottosistemi.

Si ricorda il valore della serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

11 Novembre 1999

ESERCIZIO

Un gas perfetto è composto da N fermioni, di massa m e spin $1/2$, mantenuti in equilibrio alla temperatura T . Il gas è racchiuso in un contenitore cilindrico, di area di base A , la cui estremità superiore è rappresentata da un pistone di massa M che può scorrere liberamente senza attrito lungo l'asse verticale del cilindro (asse z). Sul gas agisce inoltre la forza peso diretta lungo lo stesso asse, così che l'Hamiltoniana di singola particella per il gas è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz$$

L'altezza H alla quale viene a trovarsi il pistone in condizioni di equilibrio è determinata dalla condizione di annullamento delle forze agenti su di esso. Queste sono rappresentate dalla forza peso Mg , diretta verso il basso, e dalla forza di pressione esercitata dal gas diretta verso l'alto, $p_H A$, dove p_H è la pressione del gas all'altezza H . La condizione di equilibrio è pertanto:

$$p_H A = Mg \tag{1}$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico e si assuma inoltre di poter trascurare gli effetti dovuti all'agitazione termica del pistone. In questo caso:

- Determinare il valore dell'altezza H alla quale si posiziona il pistone in condizioni di equilibrio.
- Determinare il valore della pressione del gas all'altezza $z = 0$, ossia sulla superficie di base del cilindro, mostrando, in particolare, come tale pressione risulti indipendente dalla temperatura T .
- Calcolare il potenziale chimico μ del gas come funzione della massa M del pistone e discutere quale condizione deve soddisfare questa massa perchè il gas possa essere trattato come un gas di Boltzmann classico.

Si consideri quindi il gas nel limite fortemente degenerare di temperatura nulla $T = 0$. La condizione di equilibrio (1) deve risultare ovviamente ancora soddisfatta. In questo caso determinare allora:

- L'energia di Fermi ε_F del gas ed il valore dell'altezza H alla quale si posiziona il pistone in condizioni di equilibrio.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Febbraio 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da un insieme di N particelle identiche, dette *parioni*, che soddisfano una statistica particolare: i numeri di occupazione n_i di ciascuno stato di singola particella, corrispondente all'energia ε_i , possono assumere solo valori interi *pari*:

$$n_i = 0, 2, 4, 6, \dots$$

Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T all'interno di un volume V ed il moto delle particelle può essere trattato in approssimazione non relativistica. L'energia di singola particella ha pertanto la forma $\varepsilon = p^2/2m$.

- Calcolare il numero di occupazione medio $\bar{n}_i$ dello stato i -esimo di singola particella e la corrispondente espressione nel limite classico $\bar{n}_i \ll 1$.
- Mostrare che per il gas di parioni ha luogo il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein. Calcolare quindi il rapporto tra la temperatura di condensazione τ_c^P del gas e la temperatura di condensazione τ_c^B per un gas di bosoni ordinari di uguale massa, densità e degenerazione di spin.
- Calcolare la relazione tra pressione, volume ed energia del gas, mostrando che si giunge alla stessa espressione valida per un gas di bosoni o fermioni ordinari.

Si ricorda il valore della serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

16 Febbraio 2000

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N particelle identiche, di massa infinita e spin $1/2$, immerse in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z . Lo spin delle particelle interagisce con il campo esterno, così che ciascuna particella può trovarsi in due distinti livelli di energia:

$$E = \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{con } \varepsilon = \mu B \hbar$$

corrispondenti rispettivamente ai valori $\mp \hbar/2$ della proiezione dello spin lungo l'asse z . La degenerazione di ciascun livello è inoltre pari a g , con $g \gg N$. Il sistema è mantenuto in equilibrio alla temperatura T .

- Calcolare la funzione di partizione canonica Z del sistema nei due casi in cui si considerino le particelle come indistinguibili o distinguibili.

Si considerino quindi le particelle come *indistinguibili*. In questo caso:

- Calcolare l'entropia del sistema e discutere il risultato ottenuto nei limiti rispettivamente di basse ed alte temperature.
- Mostrare che la magnetizzazione media del sistema, definita come:

$$M = \mu \frac{\hbar}{2} \langle n_{\uparrow} - n_{\downarrow} \rangle$$

dove $n_{\uparrow}$ ed $n_{\downarrow}$ rappresentano i numeri di occupazione degli stati di spin up e down, è legata all'energia libera F dalla relazione:

$$M = - \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)$$

e calcolare esplicitamente tale quantità.

- Facoltativo*: studiare la magnetizzazione nei limiti di basse ed alte temperature, discutendo i risultati ottenuti.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

7 Giugno 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è composto da un numero N molto grande di fermioni identici, di massa m e spin $1/2$, ciascuno dei quali è un oscillatore armonico quantistico di frequenza ω . Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura $T = 0$.

- a) Si assuma che ciascuna particella sia vincolata a muoversi in 1 dimensione ($D = 1$). In questo caso, i livelli di energia di singola particella sono della forma:

$$\varepsilon_n = n \hbar \omega \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolare l'energia di Fermi ε_F del gas e mostrare che l'energia media del sistema è $E = 1/2 N \varepsilon_F$.

- b) Si consideri quindi il gas di oscillatori in dimensione $D = 2$. I livelli di energia di ciascun oscillatore sono:

$$\varepsilon_{n_1, n_2} = (n_1 + n_2) \hbar \omega \quad , \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolare nuovamente l'energia di Fermi ε_F e mostrare che in questo caso l'energia media è legata all'energia di Fermi da $E = 2/3 N \varepsilon_F$.

- c) Nel caso di dimensione $D = 2$, calcolare l'energia di Fermi ε_F e l'energia media E utilizzando l'approssimazione semi-classica, nella quale la somma discreta sugli stati quantistici è sostituita da un integrale sullo spazio delle fasi di singola particella:

$$\sum_{\text{stati}} \rightarrow g \int \frac{d^2 p d^2 x}{(2\pi\hbar)^2}$$

mostrando che si giunge agli stessi risultati derivati in precedenza.

Si ricordano i valori delle seguenti serie per le quali, nei calcoli, è possibile conservare solo il termine dominante per M grande:

$$\sum_{n=1}^M n = \frac{1}{2} M (M+1) \simeq \frac{1}{2} M^2 \quad ; \quad \sum_{n=1}^M n^2 = \frac{1}{3} M \left(M + \frac{1}{2} \right) (M+1) \simeq \frac{1}{3} M^3$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

12 Luglio 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche, di spin nullo (bosoni), mantenute in equilibrio termico alla temperatura T . Ciascuna particella può trovarsi in due distinti livelli non degeneri di energia corrispondenti, rispettivamente, alle energie:

$$\varepsilon_0 = 0 \quad \text{ed} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$. Gli stati del sistema sono pertanto contraddistinti dalle coppie di numeri di occupazione $\{n_0, n_1\}$ delle particelle nei due stati.

- a) Calcolare la funzione di partizione *canonica* Z del sistema.
- b) Calcolare l'energia media del gas e discutere il risultato nei limiti rispettivamente di basse e di alte temperature.
- c) Calcolare il potenziale chimico del gas e mostrare che, come previsto in generale per un gas perfetto di bosoni, la fugacità $z = \exp(\beta\mu)$ è una funzione monotona della temperatura che varia (per $N \gg 1$) nell'intervallo $[0, 1]$ quando la temperatura decresce tra $T = +\infty$ e $T = 0$.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Settembre 2000

ESERCIZIO N° 1

Un gas è composto da N particelle non interagenti, di massa m e spin $1/2$, soggette ad un potenziale centrale di tipo armonico con centro nell'origine. L'Hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

dove $p = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$ ed $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Il gas è mantenuto in equilibrio termico allo zero assoluto.

- a) Determinare l'energia di Fermi del gas, ε_F , e la massima distanza dall'origine, r_M , alla quale possono trovarsi le particelle del gas.
- b) Calcolare l'energia media per particella, E/N , del gas e l'energia libera F/N .
- c) Calcolare la densità $\rho(r)$ del gas in funzione della distanza r dall'origine delle coordinate, mostrando che tale densità si annulla sulla sfera di raggio massimo r_M .
- d) *Facoltativo*: calcolare la pressione nella direzione radiale $p(r)$.

Si ricorda il valore del seguente integrale (funzione beta):

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

28 Novembre 2000

ESERCIZIO

Un gas perfetto, costituito da N fermioni di massa m , è mantenuto in equilibrio alla temperatura T . Le particelle del gas sono soggette ad un campo di forze centrali per cui l'hamiltoniana di singola particella ha la forma:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha r^n$$

dove α ed n sono costanti positive.

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In queste condizioni:

- a) Calcolare l'energia media del gas.
- b) Determinare la pressione del gas, $p(r)$, in funzione della distanza r dall'origine delle coordinate. Si suggerisce a tale scopo di utilizzare il formalismo dell'ensemble gran canonico.
- c) Discutere quale condizione deve soddisfare la temperatura T affinché il gas possa essere trattato effettivamente come un gas di Boltzmann classico.

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

- d) Determinare l'energia di Fermi ε_F e la massima distanza dall'origine, r_M , alla quale si possono trovare particelle del gas.
- e) Calcolare l'energia media per particella.

Si esprimano gli integrali che compaiono nei risultati finali in termini delle seguenti funzioni speciali gamma e beta:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty ds s^{a-1} e^{-s} \quad , \quad B(a, b) = \int_0^1 ds s^{a-1} (1-s)^{b-1}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

5 Febbraio 2001

ESERCIZIO N° 1

Un recipiente è diviso in due parti da un setto adiabatico che può scorrere senza attrito, in maniera tale che i gas contenuti nelle due regioni siano all'equilibrio meccanico. Nella prima parte del recipiente è contenuto un gas di fotoni ("corpo nero") in equilibrio termico alla temperatura T . Nella seconda parte è contenuto invece un gas di particelle di massa nulla il cui numero totale N è conservato.

Determinare il volume V occupato dalle particelle nella seconda parte del recipiente, in funzione della temperatura T del gas di fotoni e del numero totale di particelle N . Si considerino separatamente i due casi in cui:

- a) Le particelle nella seconda regione siano bosoni di spin 0 alla temperatura di condensazione.
- b) Le particelle nella seconda regione siano fermioni di spin 1/2 a temperatura nulla.

Nei risultati finali si lascino simbolicamente indicati gli integrali:

$$J_n = \int_0^\infty \frac{dx x^n}{e^x - 1}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

23 Febbraio 2001

ESERCIZIO N° 1

Un gas è costituito da N particelle di massa m , spin 1/2 e carica elettrica q non interagenti tra loro. Il gas è mantenuto in equilibrio alla temperatura T all'interno di un recipiente cilindrico, di area di base A ed altezza L ed è soggetto all'azione di un campo elettrico E , uniforme e costante, diretto lungo l'asse z parallelo all'asse del cilindro. L'hamiltoniana di singola particella è pertanto:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - qEz$$

Si assuma che la temperatura T sia tale da poter considerare il gas come un gas di Boltzmann classico. In questa condizione:

- a) Calcolare il valore medio del momento di dipolo elettrico $p = q \sum_{i=1}^N z_i$.
- b) Calcolare il valore medio della suscettività elettrica, $\chi = dp/dE$, nei due limiti di campo elettrico debole ($qEL \ll kT$) e forte ($qEL \gg kT$).

Si consideri quindi il gas alla temperatura $T = 0$. In questo caso:

- c) Assumendo che l'energia di Fermi ε_F del gas sia positiva, determinare la relazione che lega ε_F al numero totale N di particelle e calcolare il momento di dipolo elettrico p .
- d) Facoltativo: per un valore dato del numero di particelle N , discutere come sia possibile determinare se l'energia di Fermi del gas risulta positiva o negativa.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

15 Giugno 2001

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da N particelle *distinguibili* mantenute in equilibrio alla temperatura T . I livelli di energia E_n di singola particella e la degenerazione d_n del livello n -esimo sono dati da

$$E_n = (n+1) E_0, \quad d_n = a^n (n+1)$$

dove $n = 0, 1, 2, \dots$ ed a è un numero intero positivo.

- a) Calcolare la funzione di partizione canonica, l'energia interna ed il calore specifico del sistema.
- b) Studiare il limite di bassa temperatura dell'energia interna e del calore specifico e dare un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.
- c) Mostrare che per $a > 1$ esiste una temperatura T_a al di sopra della quale la probabilità p_{n+1} di occupazione del livello $(n+1)$ -esimo (con $n \gg 1$) diventa maggiore della probabilità di occupazione p_n del livello sottostante. Calcolare la temperatura T_a e mostrare che in corrispondenza di tale temperatura le grandezze termodinamiche del gas risultano singolari.

Si ricorda la seguente identità utile per il calcolo delle somme:

$$\sum_k k e^{-ak} = -\frac{d}{d\alpha} \sum_k e^{-ak}$$

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

11 Luglio 2001

ESERCIZIO N° 1

Un gas perfetto è costituito da N particelle identiche di massa m contenute in un volume V . L'energia di singola particella è

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

- Calcolare la densità degli stati $g(\varepsilon)$ e studiarne i limiti ultrarelativistico, $g^{UR}(\varepsilon)$ con $\varepsilon \gg mc^2$, e non relativistico, $g^{NR}(\bar{\varepsilon})$ con $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - mc^2$ ed $\bar{\varepsilon} \ll mc^2$.
- Assumendo che le particelle siano fermioni, calcolare l'energia di Fermi ε_F del gas. Studiarne quindi il limite non relativistico, $\bar{\varepsilon}_F = \varepsilon_F - mc^2$ con $\bar{\varepsilon}_F \ll mc^2$, e trovare quale condizione deve soddisfare la densità N/V del gas affinché l'approssimazione non relativistica ($\bar{\varepsilon}_F \ll mc^2$) risulti verificata.
- Assumendo che le particelle siano bosoni, scrivere l'equazione che determina la temperatura critica di condensazione T_0 in funzione della densità N/V del gas. Studiare i limiti ultrarelativistico ($kT_0 \gg mc^2$) e non relativistico ($kT_0 \ll mc^2$) di questa equazione e trovare quale condizione deve soddisfare la densità del gas affinché l'approssimazione non relativistica risulti verificata.

PROVA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 Settembre 2001

ESERCIZIO N° 1

Un sistema è costituito da N particelle *distinguibili*, non interagenti, immerse in un campo magnetico H . Ciascuna particella possiede un momento magnetico μ che può essere orientato in direzione parallela, antiparallela od ortogonale al campo. L'energia di un particolare stato del sistema è pertanto:

$$- \sum_{i=1}^N n_i \mu H, \quad \text{con } n_i = 0, \pm 1$$

- Calcolare l'entropia del sistema e valutarne i limiti rispettivamente di basse ed alte temperature.
- Calcolare la magnetizzazione totale media del sistema, $\langle M \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N n_i \mu \right\rangle$.
- Calcolare lo scarto quadratico medio della magnetizzazione, $\langle (\Delta M)^2 \rangle$, dove $\Delta M = M - \langle M \rangle$. Confrontare il risultato ottenuto con l'espressione della suscettività magnetica, $\chi = \partial \langle M \rangle / \partial H$, e verificare che, nel limite termodinamico, le fluttuazioni relative $\sqrt{\langle (\Delta M)^2 \rangle} / \langle M \rangle$ tendono a zero come $1/\sqrt{N}$.